

## BAB 1

### PENDAHULUAN

#### 1.1 Latar Belakang Penelitian

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering mendengar atau melihat sistem jalan satu arah, arus listrik, jaringan kerja dll. Biasanya hal-hal tersebut diatas direpresentasikan secara grafik dengan titik dan garis berarah, hubungan garis dan titik yang demikian diamati oleh suatu objek di matematika yang disebut dengan digraph.

Suatu digraph terdiri dari titik-titik yang dihubungkan oleh garis berarah. Secara formal, digraph adalah objek yang terdiri dari dua himpunan yaitu :

1. Himpunan hingga yang tak kosong  $V$ , dimana unsurnya disebut *vertex* dari digraph  $D$
2. Himpunan  $E$  yang merupakan himpunan bagian dari pasangan berurut  $V \times V$ , unsurnya disebut arc dari digraph  $D$

vertex dalam digraph direpresentasikan oleh titik atau lingkaran kecil dan arc direpresentasikan oleh garis berarah dari suatu vertex ke vertex lainnya.

Suatu walk dari vertex  $u$  ke vertex  $v$  yang panjangnya  $m$  adalah suatu barisan arc dalam bentuk

$$(u = v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{m-1}, v_m = v)$$

walk diatas dapat direpresentasikan sebagai

$$u = v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{m-1} \rightarrow v_m = v$$

Suatu digraph  $D$  dikatakan terhubung kuat bila untuk setiap pasangan vertex  $u$  dan  $v$  di  $D$  terdapat walk dari  $u$  ke  $v$ . Digraph  $D$  dikatakan *ministrong* jika penghilangan satu arc dari  $D$  mengakibatkan  $D$  tidak terhubung kuat. Suatu digraph terhubung kuat  $D$  dikatakan *primitif* bila terdapat bilangan bulat  $k$  sehingga untuk setiap pasangan vertex  $u$  dan  $v$  di  $D$  terdapat walk dari  $u$  ke  $v$  dengan panjang tepat  $k$ . Bilangan bulat  $k$  terkecil yang demikian disebut disebut sebagai *eksponen* dari  $D$  dan dinotasikan oleh  $exp(D)$ .

Studi tentang eksponen digraph primitif diprakarsai oleh Wielandt[5] yang menyatakan bahwa untuk digraph primitif dengan  $n$  vertex,  $exp(D) \leq (n - 1)^2 + 1$ . Holladay dan varga [4] memperlihatkan bahwa ila  $D$  adalah digraph primitif dengan  $q$  loop maka  $exp(D) \leq 2n - q - 1$ . Selanjutnya, Liu dan Shao [1] memberikan syarat perlu dan bagi digraph terhubung kuat  $D$  dengan  $n$  vertex dan  $q$  loop yang mempunyai  $exp(D) = 2n - q - 1$ , sejalan itu dengan itu Dalimunthe dan Suwilo[10] memberikan syarat cukup untuk digraph agar mempunyai eksponen tepat  $exp(D) = 2n - q - 1$ . Pada tahun 1997, fornasini dan Valcher[3] memperkenalkan konsep 2-digraph yakni digraph dimana setiap arcnya diwarnai dengan merah atau biru. Sejalan dengan itu Shader dan Suwilo[2] memperkenalkan konsep 2-eksponen dari 2-digraph. Shader dan Suwilo mendefinisikan 2-eksponen dari 2-digraph sebagai bilangan bulat terkecil  $h + k$  sehingga untuk setiap pasangan vertex  $u$  dan  $v$  di  $D$  terdapat walk dari  $u$  ke  $v$  dengan panjang  $h + k$  dan terdiri dari  $h$  arc merah dan  $k$  arc biru. Shader dan Suwilo memperlihatkan bahwa untuk 2-digraph  $D$  dengan  $n$  vertex, maka 2-eksponen terbesar terletak pada interval  $[(n^3 - 5n^2)/, (3n^3 + 2n^2 - 2n)/2]$ . Lebih lanjut Suwilo

secara eksplisit memberikan formula bagi 2-eksponen dari 2-digraph yang terdiri dari cycle (lihat[8]), dan memperlihatkan bahwa untuk 2-digraph yang asymmetric maka  $2 \leq exp_2(D) \leq 4$  (lihat[9]). Sejalan dengan hasil dari Holladay dan Varga[4] perlu ditentukan 2-eksponen dari 2-digraph dengan loop.

## 1.2 Perumusan Masalah

Bula  $D$  adalah suatu 2-digraph primitif atas  $n$  vertex dan  $m \geq 2$  loop. Dapatkah ditemukan batas atas yang cukup "baik" bagi 2-digraph dengan  $m \geq 2$  loop.

## 1.3 Tinjauan pustaka

Shader dan Suwilo [2] memperlihatkan bahwa 2-eksponen terbesar dari 2-digraph primitif terletak di interval  $[(n^3 - 5n^2)/2, (3n^3 + 2n^2 - 2n)/2]$ . Batas bawah pada interval tersebut ditemukan dengan menggunakan 2-digraph yang terdiri dari dua cycle dan batas atas ditemukan secara teoritis. Sehingga masih terdapat gap antara batas empiris dan batas teoritis. Suwilo[8] memberikan formula bagi 2-eksponen dari 2-digraph, yang terdiri atas cycle, dan memperlihatkan bahwa untuk 2-digraph yang asymmetric maka  $2 \leq exp_2(D) \leq 4$ .

Andaikan  $D$  adalah 2-digraph primitif yang terdiri dari dua cycle  $\gamma_1$  dan  $\gamma_2$  dengan panjang masing-masing  $\ell(\gamma_1)$  dan  $\ell(\gamma_2)$ . Untuk sebarang pasangan vertex  $u$  dan  $v$ , misalkan  $p_{uv}$  adalah sebuah path terpendek dari  $u$  ke  $v$  dan definisikan

$$\ell'_r = \lim_{u,v \in V} \{b(\gamma_2)r(p_{uv}) - r(\gamma_2)b(p_{uv})\}$$

$$\ell'_b = \lim_{u,v \in V} \{r(\gamma_1)b(p_{uv}) - b(\gamma_1)r(p_{uv})\}$$

Suwilo[8] menyatakan bila  $D$  adalah 2-digraph primitif yang terdiri dari dua cycle

dengan sedikitnya terdapat satu arc untuk setiap warna, maka.

$$\text{exp}_2(D) = \ell(\gamma_1)\ell'_r + \ell(\gamma_2)\ell'_b$$

Lee dan yang [7] secara khusus mendiskusikan 2-eksponen dari satu klas 2-digraph ministrong yang terdiri dari cycle  $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n-3 \rightarrow n-2 \rightarrow 1$  dan path  $n-3 \rightarrow n-1 \rightarrow n \rightarrow 1$ . Andaikan  $D$  adalah digraph ministrong dengan banyak vertex  $n \geq 5$  yang terdiri dari cycle  $1 \rightarrow 2 \dots \rightarrow n-3 \rightarrow n-2 \rightarrow 1$  dan path  $n-3 \rightarrow n-1 \rightarrow n \rightarrow 1$ . Warnai paling sedikit satu arc untuk setiap warna, maka 2-eksponen dari 2-digraph terletak pada interval :

$$2n^2 - 8n + 7 \leq \text{exp}_2(D) \leq 2n^2 - 5n + 3$$

#### 1.4 Tujuan penelitian

Menentukan 2-eksponen bagi 2-digraph yang terdiri dari sebuah cycle dengan 2 loop.

#### 1.5 Manfaat penelitian

Penelitian ini bermanfaat untuk memperkaya literatur dibidang 2-eksponen dari 2-digraph

## 1.6 Metode penelitian

Metodologi penelitian ini bersifat literatur atau kepustakaan dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Menggunakan *Software* sederhana untuk mendukung pengerjaan pengamatan.
2. Mencari kelas-kelas dari 2-digraph kemudian membandingkannya
3. Mencari bentuk umum dari masing-masing *2-eksponen dari 2-digraph*
4. Menentukan batas atas dan batas bawah dari *2-digraph*