BAB 2
LANDASAN TEORI

2.1 Penugasan Sebagai Masalah *Matching* Bobot Maksimum Dalam Graf Bipartisi Lengkap Berlabel

Teori Dasar Graf

Graf G adalah pasangan himpunan (V,E) di mana V adalah himpunan dari *vertex* dan E adalah himpunan dari *edge* yang menghubungkan sepasang simpul ***(Johnsonbaugh Richard, 2001; 265)***

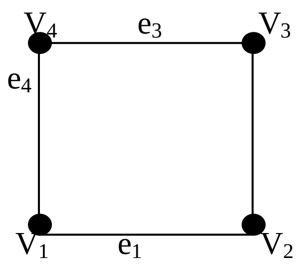
Atau graf G didefenisikan sebagai pasangan himpunan (V,E) dalam hal ini:
V=himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertex*)
$V=\{ v_1,v_2,...,v_n \}$ dan
E= himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan sepasang simpul
$E=\{ e_2,e_2,...,e_n \}$
Atau dapat ditulis singkat notasi $G=(V,E)$ ***(Munir, 2003)***

Definisi 2.1.1 Loop dan *Edge* Paralel

Sebuah *edge* yang menghubungkan pasangan *vertex* yang sama yakni (v_i,v_i) disebut loop dan dua buah atau lebih *edge* yang mempunyai *vertex -vertex* ujung yang sama disebut *edge-edge* yang paralel atau multiple *edge*. Pada gambar 2.1 dapat dilihat, gambar G_1 tidak memiliki loop maupun *edge* pararel, sedangkan pada gambar G_2 tidak memiliki loop tetapi memiliki *edge* paralel yaitu e_3,e_4 dan e_1,e_6. Dan pada gambar G_3 memiliki loop yaitu e_8 dan *edge* pararel yaitu e_3, e_4 dan e_1, e_6.

Defenisi 2.1.2 Graf Sederhana *(Simple Graf)*

Simple graph adalah graf yang tidak memuat loop dan *edge-edge* yang paralel.



Gambar 2.1 Simple Graph

Definisi 2.1.3 Ketetanggaan *(Adjacent)*

Dua buah simpul pada graf dikatakan bertetangga bila kedua simpul tersebut terhubung langsung. Atau dapat kita sebut, v_j bertetangga dengan v_k pada graf G jika (v_j,v_k) adalah sisi pada sebuah graf G.

Definisi 2.1.4 Bersisian *(Incident)*

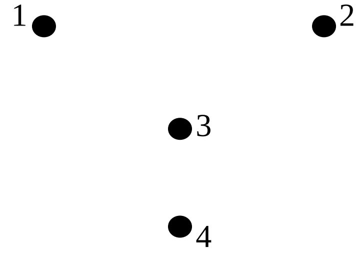
Untuk sembarang sisi $e = (v_j, v_k)$ dikatakan e bersisian dengan simpul v_j, atau e bersisian dengan simpul v_k.

Definisi 2.1.5 Simpul Terpencil *(Isolated Vertex)*

Simpul yang tidak memiliki sisi yang bersisian dengannya atau tidak bertetangga dengan simpul lainnya disebut dengan simpul terpencil.

Definisi 2.1.6 Graf Kosong *(Null Graf)*

Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong (N_n) disebut graf kosong, dimana n adalah jumlah simpul.



Gambar 2.3 Graf Kosong

Defenisi 2.1.7 Derajat *(Degree)*

Derajat dari sebuah *vertex* v_i dalam graf *G* adalah jumlah *edge* yang bersisian dengan *vi*, dengan loop dihitung dua kali. Bila jumlah *edge* yang bersisian dengan jumlah *vertex* v_i adalah *n* maka degree dari v_i adalah *n* sehingga $d(v_i) = n$.

2.2 Jenis-jenis Graf

Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka graf digolongkan menjadi dua jenis:

1. Graf sederhana *(Simple Graf)*
   Graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda dinamakan graf sederhana.
2. Graf tak-sederhana *(Unsimple-Graf)*
   Graf yang mengandung sisi ganda atau gelang dinamakan graf tak-sederhana *(unsimple graf).*

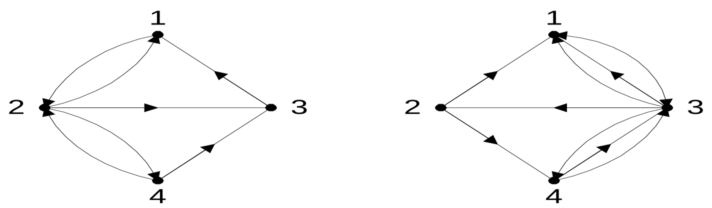
Berdasarkan jumlah simpul pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis:

1. Graf berhingga *(Limited Graf)*
   Graf berhingga adalah graf yang jumlah simpulnya n berhingga.
2. Graf tak-berhingga *(Unlimited Graf)*
   Graf yang jumlah simpulnya *n* tidak berhingga banyaknya disebut graf tak berhingga.

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas 2 jenis:

1. Graf tak-berarah *(Undirected Graf)*
   Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah.
2. Graf berarah *(Directed Graf atau Digraf)*

   Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah.

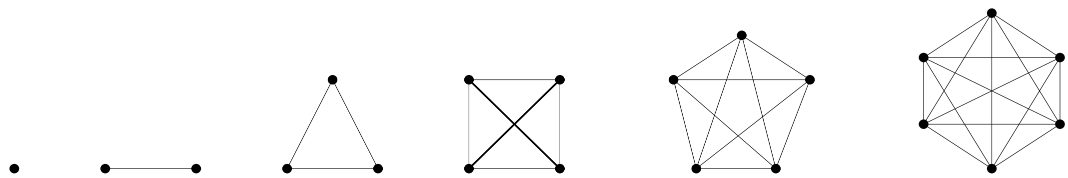


Gambar 2.4 Graf Berarah dan Graf-Ganda Berarah

Ada juga graf sederhana khusus yang terdiri dari:

a. Graf lengkap *(Complete Graf)*

Graf lengkap ialah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan *n* buah simpul dilambangkan dengan K_n. Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari *n* buah simpul adalah $n(n - 1)/2$.

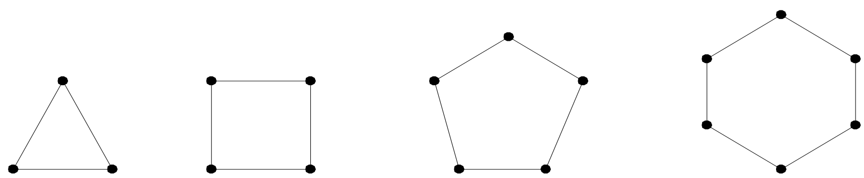


K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K6

Gambar 2.5 Graf Lengkap

b. Graf lingkaran

Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan *n* simpul dilambangkan dengan C_n.



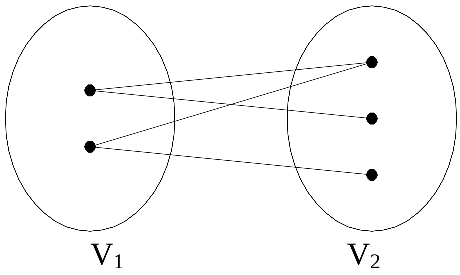
Gambar 2.6 Graf Lingkaran

c. Graf teratur *(Regular Graf)*

Graf yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama disebut *graf teratur*. Apabila derajat setiap simpul adalah *r*, maka graf tersebut disebut sebagai graf teratur derajat *r*. Jumlah sisi pada graf teratur adalah *nr/2*.

d. Graf bipartisi *(Bipartite Graf)*

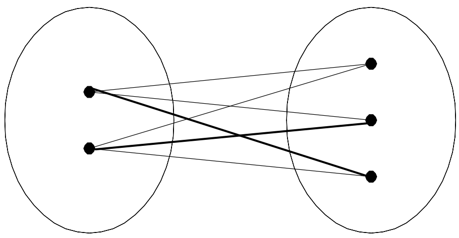
Graf *G* yang himpunan simpulnya dapat dipisah menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2, sedemikian sehingga setiap sisi pada *G* menghubungkan sebuah simpul di V_1 ke sebuah simpul di V_2 disebut graf *bipartite* dan dinyatakan sebagai $G(V_1, V_2)$.



Gambar 2.7 Graf Bipartisi

e. Graf bipartisi Lengkap *(Complete Bipartite Graf)*

Graf bipartisi yang tiap *vertex* pada V_1 dihubungkan ke setiap *vertex* dari V_2, maka graf yang demikian disebut graf bipartisi lengkap dan dinotasikan dengan $K_{m,n}$; dimana m dan n adalah jumlah *vertex* pada V_1 dan V_2.



Gambar 2.8 Graf Bipartisi Lengkap

Defenisi 2.2.1

Sebuah graf *G* adalah bipartisi jika *V(G)* dapat dipartisi ke dalam dua subset (tak hampa) V_1 dan V_2 sedemikian sehingga semua sisi *(edge)* dalam *G* menghubungkan sebuah simpul *(vertex)* dalam sebuah simpul dalam V_2.

Teori berikut menunjukkan karaktristik graf partisi :

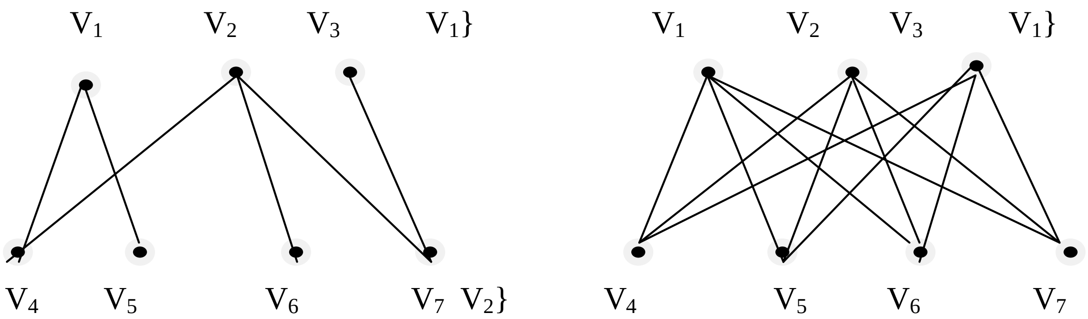
Teori :

Sebuah *(nontrival)* graf *(V,E)* adalah bipartisi jika dan hanya jika graf tersebut tidak mengandung *cycle* dengan panjang ganjil.

Dalam graf bipartisi, setiap simpul V_1 tidak harus *adjacent* (berdampingan) ke semua simpul dalam V_2. Namun jika hal ini terpenuhi, maka graf bipartisi disebut "graf bipartisi lengkap".

Contoh :

Pada gambar (2.9) diperlihatkan contoh graf bipartisi dan graf bipartisi lengkap.



(a) Graf Bipartisi (b) Graf Bipartisi Lengkap

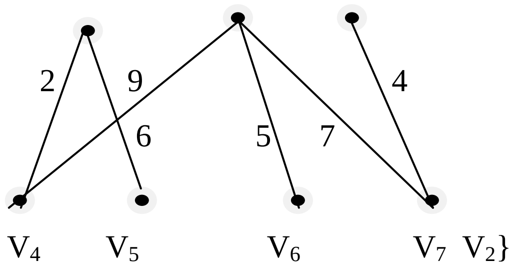
Gambar 2.9 Graf Bipartisi dan Bipartisi Lengkap

Graf bipartisi akan disebut graf bipartisi berlabel jika sisinya diberi suatu bilangan non-negatif *w*, yang disebut label/bobot.

Contoh :

Sebuah contoh graf bipartisi berlabel dapat dilihat dalam gambar (2.10)

V_1 V_2 V_3 $V_1\}$



Gambar 2.10 Graf Bipartisi Berlabel

2.3 Defenisi dan Teori *Matching* dalam Graf Bipartisi

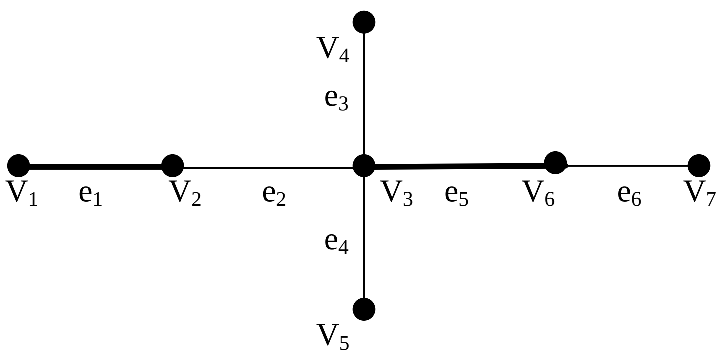
Sesungguhnya, konsep *matching* dalam graf bipartisi maupun dalam graf umum adalah sama, namun *Matching* dalam graf bipartisi mendapat perhatian khusus dalam teori graf, karena graf bipartisi sering digunakan dalam berbagai aplikasi. Pengertian *Matching* itu sendiri dapat dijelaskan dalam defenisi berikut.

Defenisi 2.3.1

Diberikan sebuah graf tak berarah $G=(V,E)$. *Matching* adalah subset ruas ME di mana tidak ada ruas dalam M yang saling berdampingan.

Contoh :

Dalam gambar bahwa $M_1 = \{e_1,e_2\}$ adalah *Matching* dalam graf $G_{1,}$ karena e_3 dan e_4 saling berdampingan.



Gambar (2.11) *Matching* $M_1 = \{e_1,e_5\}$ dalam graf G_1

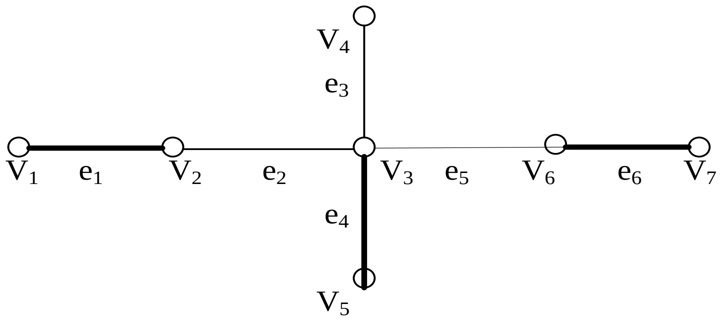
Bila kita perhatikan kembali contoh di atas, ternyata yang merupakan *Matching* dalam graf bukan hanya $M_1=\{e_1,e_5\}$, melainkan juga $\{e_1,e_5\}$, $\{e_1,e_4\}$, $\{e_1,e_6\}$, $\{e_2,e_6\}$, $\{e_3,e_6\}$, $\{e_4,e_6\}$, $\{e_1,e_3,e_6\}$, $\{e_1,e_4,e_6\}$. Dengan demikian jelaslah bahwa sebuah graf dapat saja memiliki lebih dari satu *Matching*, dengan kardinalitas/ukuran yang mungkin berbeda-beda pula, tergantung dari jumlah ruas yang dimiliki setiap *Matching*.

Defenisi 2.3.2

Matching dengan kardinalitas maksimum dalam graf *G* disebut *Matching* maksimum *(maximum Matching)*, di mana untuk graf dengan order *P*, kardinalitasnya tidak akan melebihi *p/2*.

Contoh :

Graf G_1 pada gambar 2.4 mempunyai order tujuh, sehingga kardinalitas maksimumnya adalah tiga. Dalam graf G_1 tersebut, *Matching* $M_2=\{e_1,e_4,e_6\}$ merupakan *Matching* maksimum. Hal ini dapat dilihat gambar (2.12).



Gambar (2.12) *Matching* $M_2 = \{e_1,e_4,e_6\}$ dalam graf G_1

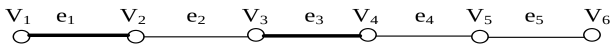
Dalam contoh dapat dilihat bahwa semua simpul dari graf G_1 merupakan simpul-simpul dalam *Matching* M_2, kecuali simpul v_4.

Defenisi 2.3.3

Matching yang memasangkan semua simpul dari graf disebut *Matching* sempurna *(perfect Matching)*.

Contoh :

Pada gambar (2.13), $M_3=\{e_1,e_3,e_5\}$ merupakan *matching* sempurna graf G_2.



Gambar 2.13 *Matching* Sempurna M_3={e_1,e_3,e_5} dalam graf G_2

Karena semua ruas dalam graf berlabel mempunyai bobot/label, maka setiap *Matching* dalam graf berlabel juga mempunyai bobot, yang merupakan total dari semua ruas dalam *Matching*.

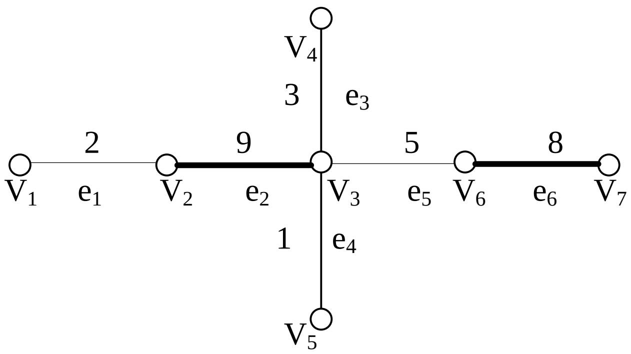
Defenisi 2.3.4

Matching bobot maksimum *(maximum weight matching)* dalam graf berlabel adalah *Matching* dengan bobot maksimum.

Matching bobot maksimum tidak harus memiliki kardinalitas maksimum.

Contoh :

Dalam gambar (2.14) *Matching* $M_4 = \{e_4, e_6\}$ bukan merupakan *Matching* dengan kardinalitas maksimum. Namun bobot dari *Matching* tersebut, yakni 17 merupakan bobot maksimum, sehingga *Matching* M_4 merupakan bobot maksimum, sehingga *Matching* M_4 merupakan *matching* bobot maksimum dalam graf berlabel G_3.



Gambar 2.14 *Matching* Bobot Maksimum M_4={e_2,e_6} dalam graf G_3

Defenisi 2.3.5

Ruas yang dimiliki oleh *Matching M* disebut *edge*, sedangkan yang tidak disebut *unmatched edge* berkenaan dengan *Matching M*.

Defenisi 2.3.6

Simpul *v* dari *G* adalah matched *vertex* berkenaan dengan *Matching M* jika *v incident* dengan ruas dari *M*, jika tidak *y* adalah *single vertex* berkenaan dengan *Matching M*. Matched *vertex* dapat juga disebut *saturated vertex*. Single *vertex* dapat juga disebut non-*saturated vertex* atau *weak vertex* atau *free vertex (exposed vertex)*.

Tabel 2.1 ***Matched edge, Unmatched edge, Matched Vertex dan Single Vertex***

Gbr	Graf	*Matching*	*Matched Edge*	*Unmatched Edge*	*Matched Vertex*	*Single Vertex*
	G_1	M_1	e_1, e_5	e_2, e_3, e_4, e_6	V_1, V_2, V_3, V_6	V_5, V_4, V_7
	G_2	M_2	e_1, e_4, e_6	e_2, e_3, e_5	$V_1, V_2, V_3, V_5, V_6, V_7$	V_4
	G_3	M_3	e_1, e_3, e_5	e_2, e_4	$V_1, V_2, V_3, V_5, V_4, V_6, V_7$	-

Defenisi 2.3.7

Alternating path dalam graf adalah *path* yang ruas-ruasnnya berganti-ganti *matched* dan *unmatched*. *Nontrivial alternating path* yang diawali dan diakhiri dengan single *vertex* disebut *augmenting path.*

Contoh :

Dalam gambar (2.11) *path* v_1, v_2, v_3, v_6, v_7 *adalah Alternating path* berkenaan dengan *Matching* M_1 tetapi bukan *augmenting path*. Sedangkan *path* v_5, v_3, v_6, v_7 adalah *augmenting path* yang berkenaan dengan *Matching* M_1.

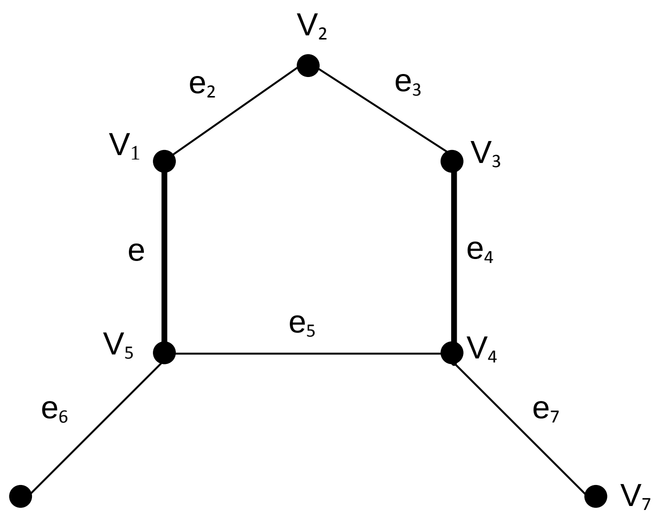
Defenisi 2.3.8

M *Matching* dalam graf *G* dan *P* adalah *augmenting path* berkenaan dengan *M*. *M* menandakan set dari *P* yang dimiliki oleh *M* dan $M=E(P) - M$. Maka $M_1=(M-M)\cup M$ adalah *Matching* untuk *G* dengan kardinalitas $|M| + 1$. Dikatakan bahwa M_1 diperoleh dengan *augmenting M* along *P* (memperbesar *M* sepanjang *P*).

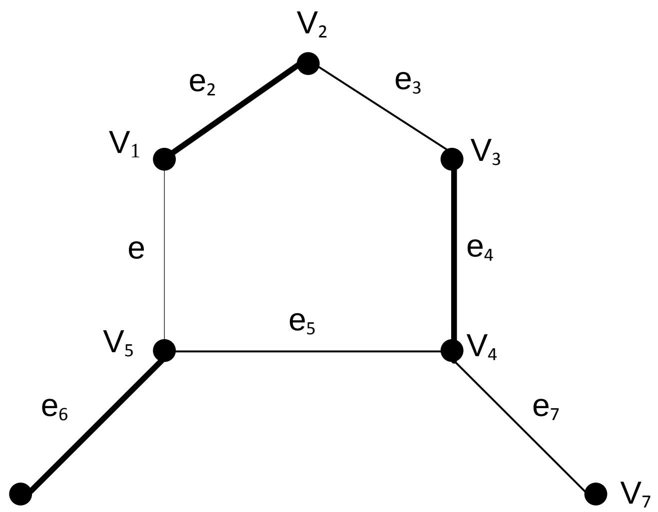
Semua *vertex* yang single berkenaan dengan M_1 juga single berdekatan dengan M.

Contoh :

Dalam gambar 2.15a *Matching* $M=\{e_1, e_4\}$ mempunyai kardinalitas 2. Augmenting path P nerkenaan dengan *Matching* M adalah v_2, v_1 , v_5, v_6. $M=\{e_1\}$ dan $M=\{e_1, e_4\}$, maka $M_1=\{ e_4, e_2, e_6\}$ adalah *Matching* dengan kardinalitas 3 (gambar 2.8 (b)).



Gambar 2.15 (a) *Augmenting M* sepanjang *P*



Gambar 2.15 (b) ***Augmenting M*** **sepanjang** ***P***

Dalam suatu graf bipartisi, diharapkan menemukan *Matching* di mana semua simpul dalam V_1 dipasangkan dengan simpul tertentu dalam V_2 ataupun sebaliknya.

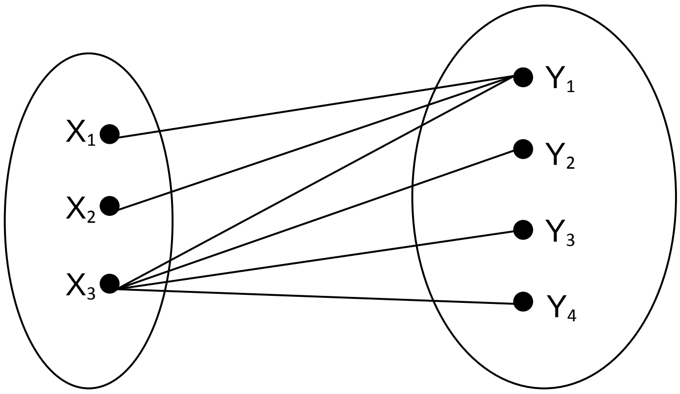
Defenisi 2.3.9

Dalam graf bipartisi simpul V_1 dan V_2, komplit *Matching* dari V_1 dan V_2 adalah sebuah *Matching* di mana terdapat suatu ruas yang *incident* dengan semua simpul dalam V_1, dengan kata lain semua simpul dalam V_1 dipasangkan dengan simpul tertentu dalam V_2.

Agar graf bipartisi memiliki komplit *matching* dari V_1 ke V_2, paling tidak jumlah simpul V_2 harus sama pula dengan yang ada pada V_1, namun syarat itu belum cukup.

Contoh :

Graf pada gambar 2.15b , tidak memilik komplit *matching* dari V_1 ke V_2, walaupun jumlah simpul dalam V_2 lebih banyak daripada jumlah simpul V_1. Dilihat bahwa simpul x_1 dan x_2 dalam V_1 sama-sama berdampingan dengan simpul y_1 dalam V_2 sehingga salah satu dari kedua simpul dalam V_1 ini tidak akan mendapat pasangan.



Gambar 2. 16 Graf Bipartisi Tanpa Komplit *Matching* dari V_1 ke V_2

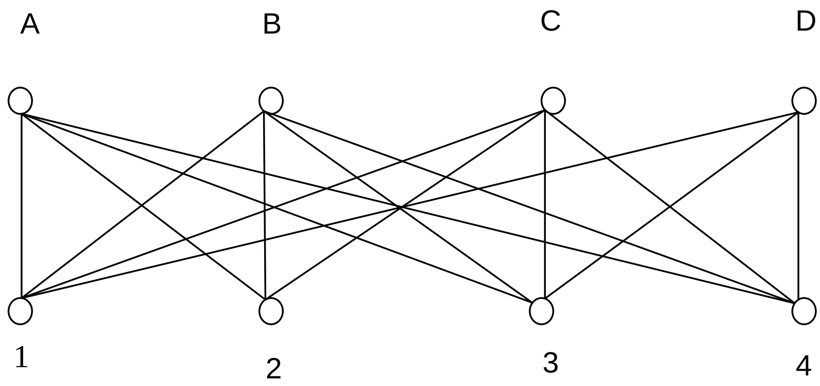
Berarti diperlukan suatu kondisi lain untuk keberadaan komplit *matching*.

2.4 Penyajian Masalah Penugasan dalam Graf Bipartisi Lengkap Berlabel

Masalah penugasan dapat dimodelkan ke dalam graf bipartisi lengkap berlabel, di mana partisi V_1 dan V_2 masing-masing mengandung n simpul, mewakili n pekerja dan n tugas. Bobot/label dalam graf bipartisi lengkap mewakili elemen-elemen matriks penugasan, tujuan masalah penugasan dapat dinyatakan sebagai *Matching* bobot maksimum dalam graf bipartisi lengkap berlabel. *Matching* itu sendiri menandakan kendala dalam masalah penugasan, yaitu penugasan satu ke satu. Matched *edge* dan unmatched *edge* berturut-turut mewakili nilai variabel keputusan ya dan tidak.

Contoh :

Suatu toko memiliki empat pekerja dengan kemampuan berbeda, yang akan ditugaskan pada empat tugas berbeda. Kemampuan setiap pekerja dalam mengerjakan suatu tugas tertentu, disajikan dalam matriks penugasan dan sebagai masalah mencari *Matching* bobot maksimum dalam graf bipartisi lengkap berlabel pada gambar 2.17.



Gambar 2.17 Graf Lengkap Berlabel dari Masalah Penugasan

Tabel 2.2 bobot

	A	B	C	D
1	5	4	7	9
2	3	4	8	3
3	7	6	10	8
4	8	9	2	6