PERANAN GEOMETRI DALAM MENGOPTIMALKAN FUNGSI 2 PEUBAH ATAU LEBIH

Drs. R.Johannes P. Mataniari; Drs. Gim Tarigan

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jurusan Matematika
Universitas Sumatera Utara

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar belakang

Studi tentang perilaku fungsi umumnya mencakup hal-hal antara lain, penentuan daerah dimana fumgsi naik/turun, maksimium/minimum, titik belok, asimtot dan sebagainya. Tujuan yang ingin dicapai dalam menyelesaikan fungsi dua peubah adalah untuk mendapatkan hasil yang optimal. Hal ini dipengaruhi oleh harga–harga peubah x dan y karena peubah x dan y merupakan peubah–peubah bebas yang menentukan harga peubah tak bebas z. Optimal tidak ditentukan oleh maksimum atau minimum. Akan tetapi yang dimaksudkan dengan hasil yang optimal ialah bagaimana memaksimumkan z=f(x,y) dengan harga peubah x dan y yang minimum.

Masalah maksimum/minimum banyak kita jumpai dalam kehidupan nyata, dalam cabang ilmu seperti ekonomi, statistika, teknik dan lain-lain. Secara singkat, teori maksimum/minimum sangat bergun untuk menyelesaikan masalah maksimum/minimum yamg banyak kita jumpai dalam berbagai hal. Misalnya, menghitung volume, luas suatu plat dan lain-lain. Salah satu cara yang dapat digunakan untuk mencari penyelesaian optimal dari fungsi dua peubah adalah secara geometri diferensial. Dengan geometri diferensial, dapat diperoleh harga peubah x dan y yang diinginkan dan harga peubah z yang optimal apabila peubah z=f(x,y) dan kendala–kendalanya diketahui.

Berdasarkan uraian di atas adalah merupakan hal yang menarik perhatian kami untuk membahas tentang “Peranan Geometri dalam mengoptimalkan Fungsi Dua Peubah atau lebih ”. dengan memakai fungsi diferensial.

Selama ini kita telah membicarakan diferensial fungsi hanya dari satu variabel, yaitu dalam fungsi eksplisitnya adalah y = f(x), atau dalam bentuk implisit f(x,y) = 0. fungsi yang demikian itu memberikan pengertian adanya hubungan antara dua variabel yaitu, x dan y. Akan tetapi banyak kasus sebenarnya merupakan hubungan-hubungan dari beberapa variabel yang dinyatakan dalam suatu fungsi. Misalnya, di dalam teori ekonomi kita tahu bahwa permintaan akan suatu barang seringkali dipengaruhi tidak hanya oleh harga barang itu, tetapi juga oleh harga barang-barang yang mempunyai hubungan erat (bisa sebagi barang subsitusi atau barang komplementer), oleh tingkat pendapatan konsumen, selera, jumlah penduduk dan sebagainya yang dalam hukum permintaan diasumsikan tetap konstan (ceteris paribus). Dengan demikian fungsi seperti itu dapat ditulis $y = f(x_1, x_2, x_2, \ldots, x_n)$. Oleh karena itu penurunan dari fungsi tersebut harus dilakukan secara terpisah untuk setiap variabel bebasnya.

1.2 Rumusan Masalah

Dalam mengoptimalkan(maksimum/minimum) nilai fungsi dengan peubah dua atau lebih sering terjadi berbagai nilai yang tidak sesuai dengan sebenarnya. Masalah adalah persoalan yang sedang dan akan dihadapi dan masalah merupakan sesuatu yang tidak diinginkan. Oleh karena itu, akibat tersebut merupakan penyimpangan dari apa yang seharusnya.

Dari uraian di atas, masalah–masalah yang dihadapi adalah sebagai berikut :

1. Apakah hasil yang ingin dicapai dari suatu fungsi dua peubah z=f(x,y) itu sudah optimal ?
2. Jika hasil tersebut tidak optimal, berapakah besarnya penyimpangan yang terjadi ?

1.3 Tujuan dan Manfaat

Hasil yang optimal adalah sesuatu yang sangat penting dalam hal apapun. Sedikit saja terjadi kesalahan dalam menentukan langkah awal, maka hasilnya akan jauh dari apa yang diharapkan.

Oleh karena itu, kami mengharapkan dengan adanya tulisan ini, maka dapat diketahui cara–cara apa yang harus ditempuh untuk mencapai suatu hasil yang optimal dari fungsi dua peubah atau lebih.

1.4 Alur/Kerangka Pemikiran

Pembahasan dalam tulisan ini adalah dengan menggunakan diferensial parsial, khususnya pada teori deferensial geometri pada pengoptimalan fungsi dua peubah z=f(x,y).

Adapun langkah–langkah yang digunakan dalam tulisan ini adalah sebagai berikut :

a. Teori tentang fungsi dua peubah z=f(x,y).
b. Pengertian maksimum dan minimum suatu fungsi.
c. Memperkenalkan teori tentang nilai ekstrim dari fungsi dua peubah z=f(x,y) dan jenis ekstrimnya.
d. Menguraikan metode-metode yang akan digunakan untuk mendapatkan hasil yang optimal dari fungsi dua peubah atau lebih z=f(x,y).
e. Menggunakan diferensial parsial dalam beberapa metode untuk menentukan luas atau volume yang optimal.
f. Mencari besarnya hampiran (penyimpangan) yang terjadi pada luas atau volume yang optimal.

BAB II
METODOLOGI

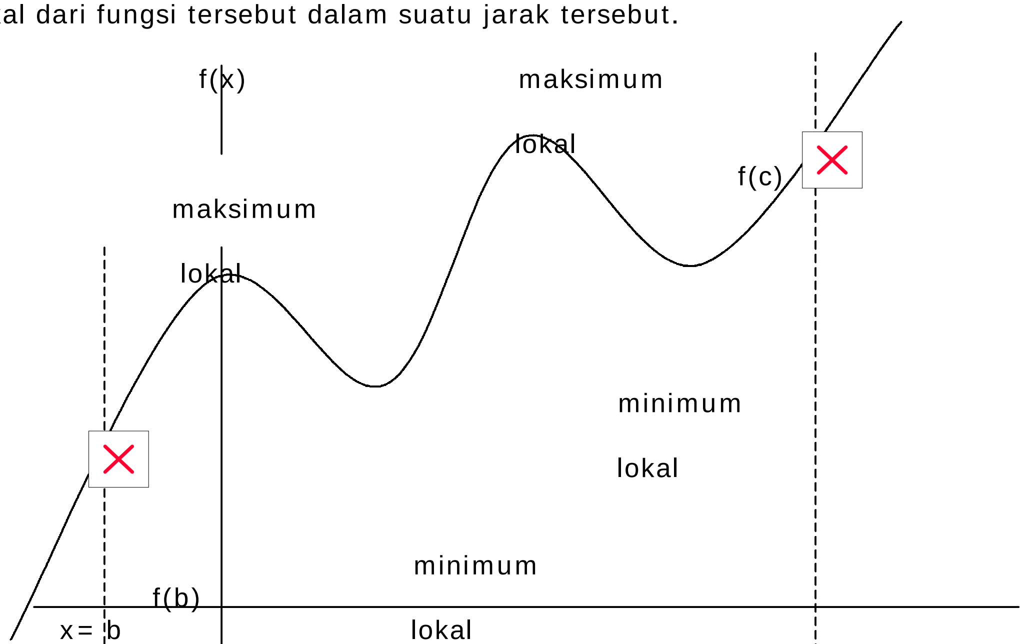
2.1 Fungsi Dua Peubah

Bila untuk setiap pasangan (x,y) dari harga–harga dua peubah bebas x dan y (dari beberapa domain D), terdapat korespondensi harga–harga tertentu, maka dikatakan bahwa z adalah fungsi dari dua peubah bebas x dan y yang tertentu di dalam domain D. Secara simbolis, fungsi dari dua variabel dituliskan dengan z=f(x,y) .

Kumpulan pasangan–pasangan (x,y) dari harga–harga x dan y untuk fungsi z=f(x,y) tertentu, disebut daerah asal atau domain (D). Jika daerah asal fungsi tidak diperinci, maka diambil D yang berupa daerah asal mulanya (natural domain), yakni himpunan semua titik (x,y) pada bidang dimana aturan fungsi berlaku dan menghasilkan suatu bilangan riil.

2.2 Pengertian maksimum dan minimum

Suatu fungsu y = f(x) dikatakan mempunyai *maksimum lokal* (maksimum relatif) dimana x = a bila f (a) lebih besar dari sembarang nilai f(x) lainnya dari x sekitar a, dan dikatakan mempunyai minimum lokal (minimum relatif) pada x = a bila f(a) lebih kecil dari sembarang nilai f(x) lain untuk x disekitar a. Maksimum dan minimum lokal suatu fungsi ini adalah maksimum dan minimum untuk jarak tertentu yang berdekatan, sedangkan maksimum dan minimum absolut dari suatu fungsi mempunyai jarak yang lebih besar lagi dan terketak pada titik yang paling tinggi atau paling rendah dari jarak tersebut, melebihi maksimum atau minimum lokal yang manapun. Jadi, dapat dikatakan bahwa f(x) mempunyai nilai maksimum absolut pada nilai x = a_1 dalam batas $b \le x \le c$, apabila nilai f(x) pada x = a_1 mempunyai nilai paling tinggi, $f(a_1) > f(x)$. Sedangkan f(x) mempunyai nilai maksimum lokal pada dalam batas $b \le x \le c$, apabila nilai f(x) pada x=a_2. Dengan cara yang sama dapat pula kita terangkan konsep minimum absolut dan minimum lokal pada gambar di bawah. Dengan demikian suatu fungsi yang mempunyai titik maksimum kurvanya berbentuk cembung keatas(convex upward) dan fungsi yang mempunyai titik minimum kurvanya berbentuk cembung kebawah (convex downward). Bisa terjadi bahwa suatu nilai maksimum lokal dari suatu fungsi lebih kecil dari nilai minumum lokal dari fungsi tersebut dalam suatu jarak tersebut.



Apabila f(x) = 0 atau $f^1(a)$ tidak tertentu jika a = 0 , maka a merupakan titik kritis, yaitu maksimum atau minimum.

2.3 Nilai Ekstrim

Nilai maksimum dari fungsi z=f(x,y) dicapai pada pasangan nilai variabel-variabel bebas x dan y adalah nilai terbesar dari fungsi f(x,y) dalam suatu lengkungan dari titik (x_o,y_o,o) dan nilai minimum dari z=f(x,y) adalah nilai terkecil di lengkungan dari titik (x_1,y_1,o).

Ada beberapa batasan yang harus kita perhatikan untuk mengetahui nilai ekstrim suatu fungsi, yakni:

1. Fungsi z=f(x,y) mempunyai nilai maksimum di (x_o,y_o) jika terdapat bilangan – bilangan positif S_1dan S_2 sehingga berlaku :
   $\forall$ (x,y) $\in$ H = { (x,y) | $|x-x_o| < S_1$, (x,y) | $|y-y_o| < S_2$ } berlaku $f(x_o,y_o) \ge f(x,y)$.
2. Fungsi z=f(x,y) mempunyai nilai minimum jika $f(x_o,y_o) \le f(x,y)$.

3. Jika fungsi $z=f(x,y)$ di (x_o, y_o) mencapai nilai minimum atau minimum maka fungsi $z=f(x,y)$ mencapai nilai ekstrim dan titiknya disebut dengan titik ekstrim.
4. Misalkan $z=f(x,y)$ merupakan suatu permukaan dan andaikan T adalah titik pada permukaan.

Jika berlaku $\left(\frac{dz}{dx}\right)_T = 0$ dan $\left(\frac{dz}{dy}\right)_T = 0$ maka T disebut titik stasioner pada permukaan.

Pandang f suatu fungsi dua peubah yang kontiniu dalam suatu daerah siku empat terbuka H di bidang xy. jika (a,b) suatu titik-dalam di dalam H dan jika $f_x(a,b)$ dan $f_y(a,b)$ ada, maka syarat perlu agar f(a,b) menjadi suatu nilai ekstrem f adalah $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ atau

$$\nabla f(a,b) = 0$$

Pandang f suatu fungsi dua peubah yang kontiniu yaang mempunyai turunan parsial pertama dan kedua yang kontiniu juga dalam suatu daerah siku empat terbuka Hdi bidang xy. Misalkan (a,b) suatu titik dlam H dengan

$$\nabla f(a,b) = 0$$

Dan andaikan $\Delta = f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b).$

Maka

i. jika $\Delta > 0$ dan $f_{xx}(a,b)<0$, maka f(a,b) adalah nilai maksimum lokal f
ii. jika $\Delta > 0$ dan $f_{xx}(a,b)>0$, maka f(a,b) adalah nilai minimum lokal f
iii. jika $\Delta > 0$ maka f(a,b) adalah bukan suatu nilai ekstrem f
iv. jika $\Delta = 0$, maka uji ini tak berkeputusan.

2.4 Lagrange Multiplier

Jika f fungsi tiga peubah x, y, dan z, memiliki turunan parsial pertama terhadap tiap perubah maka suatu syarat perlu agar f(a,b,c) menjadi nilai ekstrem f adalah $f_x(a,b,c) = 0$, $f_y(a,b,c) = 0$ dan $f_z(a,b,c) = 0$. Syarat ini dapat ditulis dengan pendek sebagai

$$\nabla f(a,b,c) = 0$$

Titik-titik (a,b,c) yang memenuhi persamaan ini adalah titik kritis untuk f. semua titik dimana f memiliki maksimum lokal atau minimum lokal termasuk dalam kukmpulan titik kritis. Namun demikian, saperti telah kita lihat, tidak semua titik kritis memberikan nilai ekstrem.

Ditemukan nilai ekstrem fungsi dua variabel $F(x,y) = 3x^3 + y^2 – 9x + 4y$. Soal 1: Apabila diminta untuk menentukan jarak minimum titik P: (x,y,z) dari titik asal, dengan syarat P harus pada permukaan $z^2 = x^2y + 4$, yaitu kita tentukan minimum dari fungsi $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, yang memenuhi kendala (atau syarat batas). $g(x, y, z) = x^2y – z^2 + 4$. $F(x,y) = 3x^3 + y^2 – 9x + 4y$ adalah nilai ekstrem bebas. Dan soal 1 adalah soal nilai ekstrem terkendala atau nilai ekstrem bersyarat. Soal 1 dipecahkan dengan menghilangkan z diantara dua persamaan lalu kemudian ditentukan titik kritis dari fungsi yang terjadi. Karena selalu mungkin untuk menghilangkan perubah diantara dua persamaan dan karena menentukan turunan parsial persamaan yang dibentuk, maka diajukan disini satu cara lain untuk menangani soal-soal nilai ekstrem terkenadala yang dikenal dengan nama metode pengali lagrange.

BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Fungsi berperubah bebas lebih dari satu

Suatu fungsi perubah melibatkan tiga hal: wilayahnya, D, yaitu suatu himpunan pasangan terurut bilangan-bilangan real; jelajahnya, R, yaitu suatau himpunan bilangan real; dan suatu aturan pemadanan yang memungkinkan kita menetukan bilangan unik yang mana dari jelajahnya berpadanan dengan tiap pasangan terurut dalam wilayahnya.

Memang mungkin beberapa pasangan terurut dalam D memiliki padanan yang sama dalam R, tetapi tidak mungkin lebih dari satu bilangan dalam R berpadanan dengan satu pasangan terurut tertentu dalam D.

Misalkan f suatu fungsi dua perubah. Maka f(x,y), baca "f(dari)x,y," merupakan suatu bilangan yang unik dalam jelajahnya yang menjadi padanan (x,y) dalam wilayahnya; f(x,y) disebut nilai fungsi f di (x,y). perubah x dan y disebut perubah bebas fungsi f itu; jika z = f(x,y) maka z adalah perubah tak bebasnya, atau perubah terikatnya.

Apabila wilayah tidak dengan jelas dinyatakan dalam defenisi suatu fungsi dua perubah maka kita artikan bahwa wilayahnya adalah himpunan semua pasangan terurut bilangan-bilangan riel(x,y) yang membuat f(x,y) mejadi suatu bilangan riel yang unik. Fungsi f suatu fungsi dua perubah x dan y membentuk suatu himpunan ganda tiga terurut bilangan-bilangan (x,yf(x,y)), atau (x,y,z) dengan z = f(x,y).

Dalam uraian seterusnya, untuk mudahnya, sering digunakan notasi f(x,y) untuk menyatakan fungsi f yang nilainya adalah f(x,y). Dengan notasi ini dapat segera terlihat banyaknya perubah bebas dan huruf-huruf yang menyatakan perubah-perubah itu.

Contoh 1: Tentukan lengkungan ketinggian fungsi z = $\sqrt{x^2 - y^2} - 1$

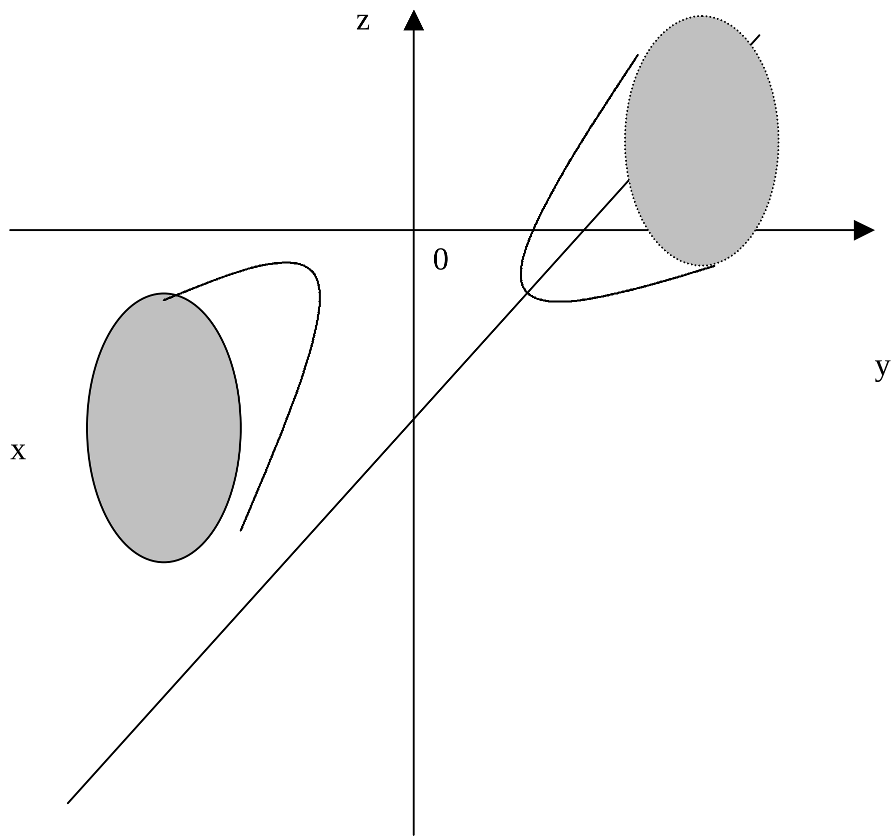
Penyelesaian:

Grafik ini merupakan bagian atas setengah suatu hiperboloid dua lembar yang ditujuakan pada gambar 3.1.1 (dengan a=b=c=1). Kita cari lengkungan-lengkungan dalam bidang xy yang merupakan proyeksi kurva perpotongan permukaan z = $\sqrt{x^2 - y^2} - 1$ dengan bidang z = k untuk berbagai nilai k negatif. Jika kita subsitusikan k untuk z dalam persamaan lengkungan ketinggian di bidang xy.

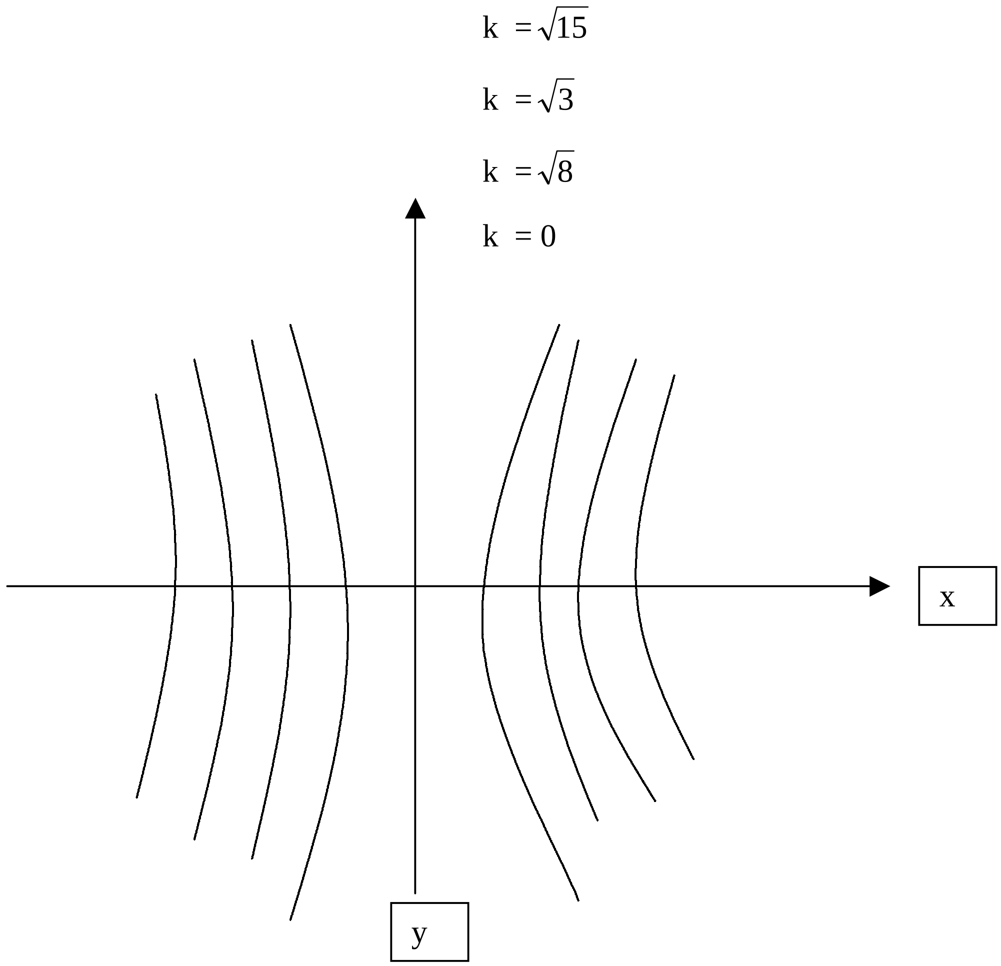
$$\frac{x^2}{k^2+1} - \frac{y}{k^2+1}^2 = 1$$

Untuk tiap nilai k, persamaan ini menyatakan suatu hiperbol dalam posisi standar. Jadi untuk k = $\sqrt{3}$, hiperbonya adalah $\frac{x^2}{4} - \frac{y}{4}^2 = 1$. Komputasi dapat dipermudah dengan memilih nilai k yang memberikan $k^2 + 1$ sebagai suatu kuadrat. Lengkungan ketinggian untuk k = 0, k = $\sqrt{3}$, k = $\sqrt{8}$ dan k = $\sqrt{15}$ diperlihatkan dalam gambar 3.1.2. Tidak sukar memperluas defini kita atas fungsi satu perubahan dan fungsi dua perbah untuk diterapkan pada fungsi dengan perubah tiga atau lebih.

Pandang D suatu himpunan ganda tiga terurut bilangan real dan pandang R suatu himpunan bilangan real. Suatu aturan pemadanan yang memadankan tiap ganda tiga dari D dengan satu dan hanya satu bilangan real dalam R, serta yang memadankan setiap bilangan real dalam R dengan paling kurang satu ganda tiga dalam D , disebut fungsi tiga peubah. Himpunan D itu disebut wilayah (daerah defenisi) fungsi tersebut dan himpunan ? jelajahnya R (daerah nilainya).



Gambar 3.1.1



Gambar 3.1.2

3.2 Turunan Parsial

Jika di dalam f(x,y) nilai y ditahan agar konstan, maka f menjadi fungsi satu perubah bebas x dan mungkin ditentukan turunannya terhadap x dengan memperlakukan y sebagai konstanta. Turunan semacam ini disebut turunan parsial f terhadap x da biasanya ditulis $\frac{\partial f}{\partial x}$ atau f_x .

Misalnya, jika f(x,y) = x^2- 3xy + ln(x^2+y^2) diturunkan terhadap x dengan memperlakukan y sebagai konstanta, maka kita peroleh nilai turunan parsial f terhadap x di titik (x,y),

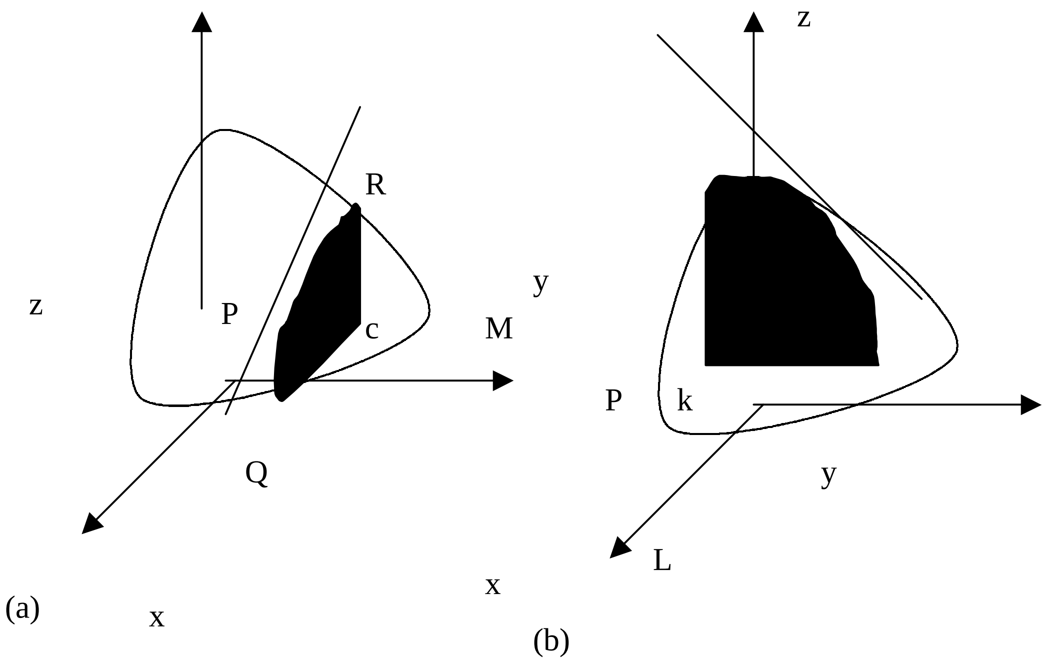
$$\frac{\partial f}{\partial x} f(x,y) = f_x(x,y) = 2x - 3y + \frac{1}{x^2+y^2}(2x)$$

Serupa itu pula, turunan parsial f terhadap y diperoleh dengan menurunkannya terhadap y dan dengan memperlakukan x sebagai konstanta.

Turunan ini ditulis $\frac{\partial f}{\partial y}$ atau f_y. Sebagai contoh, jika $f(x,y) = x^2 - 3xy + \ln(x^2+y^2)$ maka nilai $\frac{\partial f}{\partial y}$ di (x,y) adalah

$$\frac{\partial f}{\partial y} f(x,y) = f_y(x,y) = -3y + \frac{1}{x^2+y^2}(2y)$$

Turunan parsial mempunyai arti geometri yang sederahana. Pandang suatu permukaan yang persamaannya z = f(x,y). bidang y = c memotong permukaan ini pada lengkungan QPR (gambar) dan nilai turunan parsial f terhadap x, denagn y bernilai konstan c, adalah tanjakan garis singgung pada lengkungan bidang QPR di titik P:(x, c, f(x,c)). Serupa itu juga, bidang x=k memotong permukaan z = f(x,y) pada lengkunagan LPM(gambar) dan f_y (k,y) adalah tanjakan garis-singgung pada lengkungan bidang LPM ini di titik :(k,y,f(k,y)).



Contoh 1:

volume V suatu gas terentu memiliki hubungan dengan temperaturnya T dan tekanannya P menurut hukum gas

PV = 10 T

Dengan V diukur denagn inchi kubik, T dalam derajat dan P dalam pon per inci kuadrat. Jika volume gas itu diusahakan konstan 200 inci kubik, berapakah laju perubahan sesaat tekanan terhadap temperaturnya?

Penyelesaian:

Persamaan gas tersebut dapat ditulis P = 10 T/V. laju perubahan P terhadap T, jika V konstan adalah

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{10}{V}$$

Karena V = 200, maka laju perubahan tekanan terhadap temperatur adalah 10/ 200 = 0.05.

Contoh 2:

Jika f(x,y,z) = xy + 2 yz + 3 zx, tentukan f_x, f_y, dan f_z.

Penyelesaian:

Untuk mendapat f_x kita pandang y dan z sebagai konstanta dan kita turunkan f terhadap perubah x. jadi

$$f_x(x,y,z) = y + 3z,$$

Untuk memperoleh f_y, kita perlakukan x dan z sebagai konstanta f diturunkan terhadap y,

$$f_y(x,y,z) = x + 2z$$

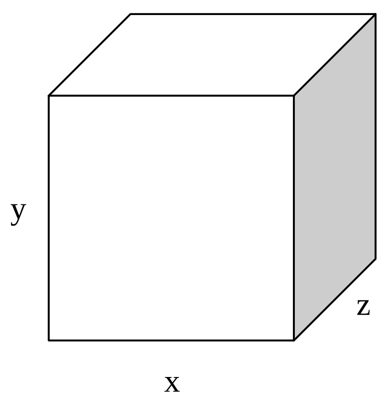
serupa itu pula

$$f_z(x,y,z) = 2y + 3x$$

Contoh 3:

Suatu tangki logam dengan atasnya terbuka muat 256 kaki kubik cairan. Bagaimana ukuran tangki tersebut yang memerlukan sesedikit bahan pada pembuatannya?

Penyelesaian:



$$V = 256 \text{ kaki kubik}$$

$$x.y.z = 256$$

$$z = \frac{256}{x.y}$$

$$L = 2xy + 2yz + xz$$

$$= 2xy + 2y\frac{256}{x.y} + x\frac{256}{x.y}$$

$$L = 2xy + \frac{512}{x} + \frac{256}{y}$$

Syarat:

* $\frac{dL}{dx} = 0$

$2y - \frac{512}{x^2} = 0$

$2y = \frac{512}{x^2}$

$y = \frac{256}{x^2}$ ....(1)

* $\frac{dL}{dx} = 0$

$2x - \frac{256}{y^2} = 0$

$2x = \frac{256}{y^2}$

$x = \frac{128}{y^2}$ ....(2)

Subsitusi pers(1) ke (2):

* $y = \frac{256}{x^2} = \frac{256}{(\frac{128}{y^2})^2} = \frac{256y^4}{(128)^2} = \frac{y^4}{64}$

$y^3 = 64$
y = 4 kaki

* $y = 4 \rightarrow x = \frac{128}{y^2} = \frac{128}{4^2}$

x = 8 kaki

* $z = \frac{256}{xy} = \frac{256}{8.4} = \frac{256}{32} = 8$ kaki

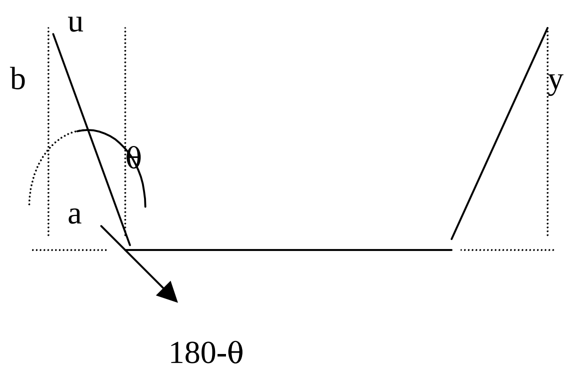
Ukurannya: panjang = 8 kaki
Lebar = 8 kaki
Tinggi = 4 kaki

maka: L = 2xy + 2yz + xz
= 2(8)(4) + (2)(4)(8) + (8)(8)
= 64 + 64 + 64
= 192 kaki persegi

Contoh 4:

Suatu talang terbuka yang penampangnya suatu trapesium sama kaki akan dibuat dari selembar panjang logam dengan lebar 12 inchi, dengan cara menekuk untuk membuat sisi-sisinya. Tentukan sudut alas talang itu dan kedua sisinya agar muatan talang dapat maksimum!

Penyelesian:



$$* \quad \text{Sin } (180\text{-}\theta) = \frac{b}{y}$$

$$\text{Sin } \theta = \frac{b}{y}$$

$$b = y \text{ Sin } \theta$$

$$* \quad \text{Cos } (180\text{-}\theta) = \frac{a}{y}$$

$$-\text{ Cos } \theta = \frac{a}{y}$$

$$a = -y \cos \theta$$

lebar = 12 inchi

$x + 2y = 12$

$x = 12 - 2y$

maka:

$L = p.l = (x + a)\, b = (12 - 2y - y \cos \theta)\, y \sin \theta$

$\quad = 12\, y \sin \theta - 2y^2 \sin \theta - y^2 \sin \theta \cos \theta$

syarat:

$$* \quad \frac{dL}{dy} = 0$$

$$\frac{d}{dy}\, 12\, y \sin \theta - 2y^2 \sin \theta - y^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

$12 \sin \theta - 4y \sin \theta - 2y \sin \theta \cos \theta = 0$

$\sin \theta\, (12 - 4y - 2y \cos \theta) = 0$

$12 - 4y - 2y \cos \theta = 0$

$4y - 2y \cos \theta = 12$

$2y - y \cos \theta = 6$

$y(2 + \cos \theta) = 6$

$$y = \frac{6}{2 + \cos\theta} \qquad \text{......................................(3)}$$

$$* \quad \frac{dL}{d\theta} = 0$$

$\frac{d}{d\theta}$ 12 y sin θ - 2y^{2}sin θ - y^{2}sin θcos θ = 0

12 y cos θ - 2y^2 cos θ + y^{2}sin θ - y^{2}cos^2 θ = 0

(12 cos θ - 2y cos θ + ysin^{2}θ - ycos^2 θ) y = 0

y = 0 tidak mungkin

12 cos θ - 2y cos θ + ysin^{2}θ - ycos^2 θ = 0

12 cos θ - 2y cos θ + y (1- cos^2 θ) - y cos^2 θ = 0

12 cos θ - 2y cos θ + y - y cos^2 θ - y cos^2 θ = 0

12 cos θ - 2y cos θ + y - 2y cos^2 θ = 0 ....(4)

subsitusikan persamaan (3) ke persamaan (4)

$$12\cos\theta - 2\frac{6}{2+\cos\theta}\cos\theta + \frac{6}{2+\cos\theta} - 2\frac{6}{2+\cos\theta}\cos^2\theta = 0$$

$$\frac{12\cos\theta}{2+\cos\theta} - \frac{6}{2+\cos\theta} + \frac{12\cos^2\theta}{2+\cos\theta} = \frac{12\cos\theta(2+\cos\theta)}{2+\cos\theta}$$

12 cosθ - 6 + 12 cos^{2}θ = 24 cos θ + 12 cos^{2}θ

12 cosθ = -6

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$

θ = 120^0

besar sudut talang tersebut adalah 120^0

maka ukuran-ukurannya:

* $y = \frac{6}{2+\cos\theta}$

  $y = \frac{6}{2+\frac{1}{2}}$

  y = 4 kaki

* x = 12 – 2y

  = 12- 2(4)

  x = 4 kaki

Contoh 5:

Tentukan nilai minimum dari:

f(x,y) dengan kendala g(x,y) = xy – 3 = 0

Penyelesain:

Gradien f dan g adalah vektor :

* $\bar{v}$ f(x,y) = f_x(x,y) i + f_y(x,y)j

  = 2xi + 2yj

* $\bar{v}$ g(x,y) = g_x(x,y) i + g_y(x,y)j

  = yi + xj

maka:

f_x(x,y) = λ g_x(x,y)

2x = λy

$\lambda = \frac{2x}{y}$ ....(5)

* $f_x(x,y) = \lambda\, g_x(x,y)$

$2y = \lambda x$

$\lambda = \frac{2y}{x}$ ....(6)

sehingga persamaan 5 dan 6:

$\lambda_1 = \lambda_2$

$\frac{2x}{y} = \frac{2y}{x}$

$2x^2 = 2y^2$............................(7)

subsitusi persamaan (7):

$xy - 3 = 0$

$xx = 3$

$x^2 = 3$

$x = \sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}$

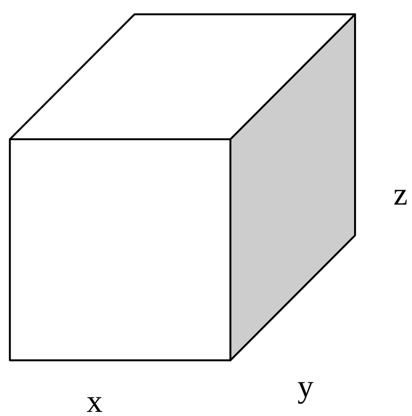
maka nilai minimum

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + y^2 \\ &= (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 \\ &= 3 + 3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Contoh 6:

Bagaimana ukuran suatu kotak segi empat terbuka atasnya yang mempunyai volume maksimum apabila luas permukaan 48?

Penyelesaian:



$V = x\,y\,z$

$L = xy + 2xz + 2\,yz = 48$ ....(8)

* $V_x(x, y, z) = y\,z$

$V_y(x, y, z) = x\,z$

$V_z(x, y, z) = x\,z$

* $L_x(x, y, z) = y + 2z$

$L_y(x, y, z) = x + 2z$

$L_z(x, y, z) = 2x + 2y$

Maka:

* $V_x(x, y, z) = \lambda\, L_x(x, y, z)$

$y\,z = \lambda(y + 2z)$

$\lambda_1 = \dfrac{yz}{y+2z}$ ....(9)

* $V_y(x, y, z) = \lambda\, L_y(x, y, z)$

$x\,z = \lambda(x + 2z)$

$\lambda_2 = \dfrac{xz}{x+2z}$ ....(10)

* $V_z(x, y, z) = \lambda\, L_z(x, y, z)$

$x\,y = \lambda(2x + 2y)$

$\lambda_3 = \dfrac{xy}{2x+2y}$ ....(11)

Persamaan(9)(10):

$\lambda_1 = \lambda_2$

$\dfrac{yz}{y+2z} = \dfrac{xz}{x+2z}$

$xyz + 2yz^2 = xyz + 2xz^2$

$2yz^2 = 2xz^2$

$y = z$ ....(12)

dari persamaan (10)(11):

$\lambda_2 = \lambda_3$

$\dfrac{xz}{x+2z} = \dfrac{xy}{2x+2y}$

$2x^2z + 2xyz = x^2y + 2\,xyz$

$2x^2z = x^2y$

$z = \dfrac{1}{2}y$ ....(13)

dari persamaan (12)(13):

$z = \dfrac{1}{2}y$

$= \dfrac{1}{2}x$ ....(14)

Subsitusi persamaan(12)(13)(14) ke (8):

$xy + 2xz + 2yz = 48$

$x.x + 2x.\frac{1}{2}x + 2x.\frac{1}{2}x = 48$

$x^2 + x^2 + x^2 = 48$

$3x^2 = 48 \rightarrow x = 4$ maka didapat:

$y = x = 4$

$z = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} 4 = 2$

ukuran kotak adalah:

x = panjang = 4 satuan

y = lebar = 4 satuan

z = tinggi = 2 satuan

sehingga :

Vmaksimum = x y z = 4.4.2

= 16 satuan volume

BAB IV
KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang diperoleh dam pembahasan BAB III dapat kita lihat bahwa geometri sangat berperan dalam menentukan nilai optimal dari dua perubahan atau lebih suatu fungsi. Dalam menentukan nilai optimal tersebut, digunakan berbagai metode seperti metode Lagrange selain daripada itu penulis juga menggunakan turunan parsial untuk mancari nilai optimal dari volume dan luas, seperti contoh-contoh di atas.

4.2 Saran

Kita bisa memakai teori-teori di atas dalam kehidupan sehari-hari, karena apa yang dipaparkan diatas itu sangat berhubungan erat dengan apa yang kita gunakan dalam melakukan aktivitas kita. Dan sangatlah penting bagi kita untuk mengetahui tentang optimisasi supay kita tidak mengalami kerugian.

DAFTAR PUSTAKA

1. Edwin J. Purcell, kalkulus dan geometri analitis, edisi ke 3, jilid 2, penerbit Erlangga, Jakarta.
2. Hamdy A. Taha, operations research an introduction, second edition, MACMILLAN PUBLISHING CO. INC, New York.